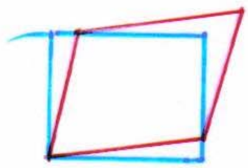
CAPITULO 8.- DEFORMACIONES

Deformacion longitudinal

+ Acortamiento
− Alargamiento.

Deformacion Tangencial

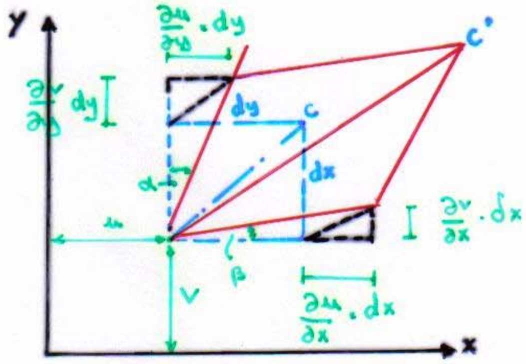
γ_{xy} , γ_{yx}



+ Si cierra el angulo
− Si abre el angulo

DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$



$$tg\beta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\cdot dx}{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx\right)}$$

$\frac{\partial v}{\partial x} \lll \ldots 1$

$$\beta = tg\,\beta = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Igual

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \text{Igual} \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ → SOLO "3" INDEPENDIENTES

DIFERENCIANDO

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y} \qquad \frac{2\,\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

INVARIANTES EN DEFORMACIONES

* Hay 3 direcciones ortogonales con solo deformaciones longitudinales.
* Los valores de estas deformaciones longitudinales son las raíces de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x-\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y-\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z-\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

O bien: las raíces de la ecuación de 3^er grado.

$$\epsilon^3 - E_1\epsilon^2 + E_2\epsilon - E_3 = 0$$

SIENDO:

$$E_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$E_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3$$

$$E_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{1}{4}\left(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{xz}^2 + \varepsilon_z\cdot\gamma_{xy}^2\right) + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{xz} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

LAS DIRECCIONES DE LAS DEFORMACIONES PRINCIPALES PUEDEN OBTENERSE RESOLVIENDO EL SISTEMA.

Para la dirección principal "i"

$$2(\varepsilon_x - \varepsilon_i)\cdot l_{xi} + \gamma_{xy}\cdot l_{yi} + \gamma_{xz}\cdot l_{zi} = 0$$

$$\gamma_{xy} l_{xi} + 2(\varepsilon_y - \varepsilon_i)\cdot l_{yi} + \gamma_{zy} l_{zi} = 0$$

$$\gamma_{xz}\cdot l_{xi} + \gamma_{zy}\cdot l_{yi} + 2(\varepsilon_z - \varepsilon_i)\cdot l_{zi} = 0$$

DEFORMACIÓN ESFÉRICA Y DESVIADORA

EL CAMBIO DE VOLUMEN ES: $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = E_1$ (1^er invariante)

TENSOR DEFORMACIONES

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x-\bar{\varepsilon} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y-\bar{\varepsilon} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z-\bar{\varepsilon} \end{vmatrix}$$

↓ TENSOR ESFERICO

↓ CAMBIO DE VOLUMEN IGUAL EN TODAS DIRECCIONES

↓

↓ TENSOR DESVIADOR

↓ CAMPIO DE FORMA SIN CAMBIO DE VOLUMEN

↓ INVARIANTES

$D_1 = 0$

$D_2 = \frac{1}{3} \cdot E_1^2 - E_2$

$D_3 = E_3 - \frac{1}{3} E_2 E_1 + \frac{2}{27} E_1^3$

PLANOS OCTAHEDRICOS

CUMPLEN $\varepsilon_{oct} = \frac{1}{3} \cdot E_1$. ¡NO SON ORTOGONALES!

EL VALOR DE LA DEFORMACIÓN ANGULAR ES:

$$\gamma_{oct} = \frac{2}{3}\left((\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2 \right) \right)^{1/2}$$

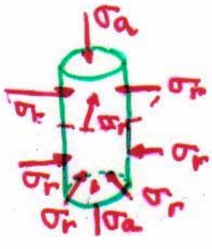
VARIABLES EN TENSIONES Y DEFORMACIONES

COMO HEMOS VISTO ANTERIORMENTE, EN EL PLANO OCTAHEDRICO

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$q = \left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 3\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \right) \right)^{1/2}$$

En el caso de ensayo triaxial



$$p = \frac{1}{3}(\sigma_a + 2\sigma_r)$$

$$q = \sigma_a - \sigma_r$$

EN DEFORMACIÓN, SEPARANDO CAMBIO DE VOLUMEN Y CAMBIO DE FORMA. (¡PLANO OCTAHÉDRICO!)

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{3}\left(2(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2 + 2(\varepsilon_y-\varepsilon_x)^2 + 2(\varepsilon_x-\varepsilon_z)^2 + 3(\gamma_{xy}^2+\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2)\right)^{1/2}$$

Y PARA EL ENSAYO TRIAXIAL:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r$$

$$\varepsilon_s = \frac{2}{3}(\varepsilon_a - \varepsilon_r)$$

CÍRCULO DE MOHR EN DEFORMACIONES

SE ADOPTA: DEFORMACIONES LONGITUDINALES ACORTAMIENTO POSITIVAS
DEFORMACIONES TANGENCIALES POSITIVAS SI EL CORTANTE ES POSITIVO

CON NUEVO CONVENIO DE SIGNOS.

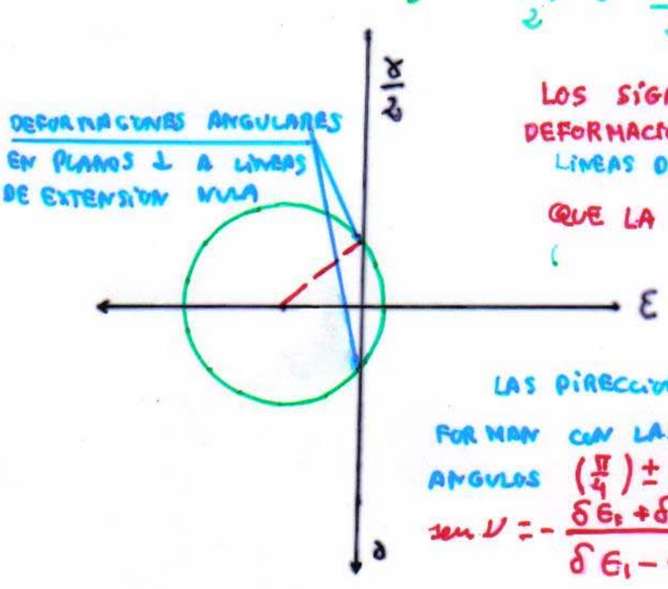
$$\epsilon_i = -\frac{\partial v_i}{\partial i} \qquad \gamma_{ij} = -\left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i}\right)$$

v_i: corrimiento en la dirección i

CÍRCULO DE MOHR EN TENSIONES → CÍRCULO DE MOHR EN DEFORMACIONES

SUSTITUIR $\sigma_i \rightarrow \varepsilon_i$ o $\delta\varepsilon_i$

$$\tau_{ij} \rightarrow \frac{\gamma_{ij}}{2} \text{ o } \frac{\delta\gamma_{ij}}{2} \quad (\varepsilon_{ij} \text{ o } \delta\varepsilon_{ij})$$



LOS SIGNOS DEBEN CAMBIARSE EN LAS DEFORMACIONES ANGULARES DE DIRECCIONES ⊥ LÍNEAS DE EXTENSIÓN NULA. DIRECCIONES EN QUE LA DEFORMACIÓN LONGITUDINAL ES NULA

LAS DIRECCIONES PRINCIPALES DE DEFORMACIÓN FORMAN CON LAS LÍNEAS DE EXTENSIÓN NULA UNOS ÁNGULOS $\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm \left(\nu/2\right)$

$$\operatorname{sen} \nu = -\frac{\delta\epsilon_1 + \delta\epsilon_3}{\delta\epsilon_1 - \delta\epsilon_3} = -\frac{\delta\epsilon_v}{\delta\gamma_{max}}$$

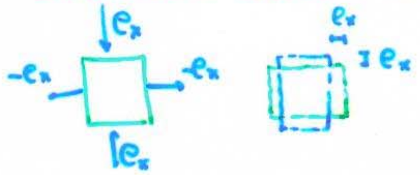
DESCOMPOSICION DEL TENSOR DESVIADOR

LLAMAMOS $e = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$ $\quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \; \ldots \quad e_x = \varepsilon_x - e$

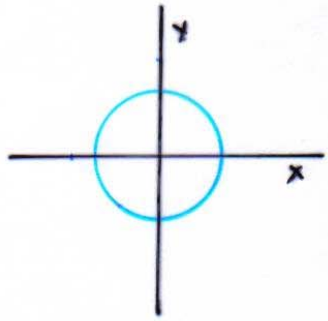
EL TENSOR DESVIADOR PUEDE DESCOMPONERSE EN CINCO SUMANDOS

$$\begin{vmatrix} e_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & e_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & e_z \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{yz} \\ 0 & \varepsilon_{yz} & 0 \end{vmatrix}}_{\text{SOLO DEFORMACION ANGULAR}} +$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & -e_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_z & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{vmatrix}}_{\text{DEFORMACION LONGITUDINAL SIN CAMBIO DE VOLUMEN}}$$



ELIPSOIDE DE DEFORMACIONES



SI CONSIDERAMOS UNA ESFERA DE RADIO INFINITESIMAL

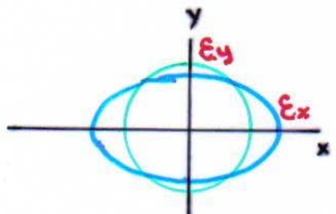
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

↓

APLICAMOS LAS DEFORMACIONES LONGITUDINALES

↓

ELIPSE $\dfrac{x^2}{(1+\varepsilon_x)^2} + \dfrac{y^2}{(1+\varepsilon_y)^2} + \dfrac{z^2}{(1+\varepsilon_z^2)} = R^2$



↓

APLICAMOS LAS DEFORMACIONES ANGULARES

$$\frac{x'^2}{(1+\varepsilon_x)^2} + \frac{y'^2}{(1+\varepsilon_y')^2} + \frac{z'^2}{(1+\varepsilon_z')^2} = R^2$$